JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 23, 214–228 (1978)

Tschebyscheff-Approximation mit rationalen Splines bei freien Knoten

HERMANN SCHOMBERG

Philips GmbH Forschungslaboratorium Hamburg, Vogt-Kölln-Str. 30, 2 Hamburg 54, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by Lothar Collatz

Received November 15, 1976

A function $s \in C^n[\alpha, \beta]$ is called a rational spline, if $s^{(n)}$ is positive, and if there exist knots $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = \beta$ such that the restrictions $s \mid [x_i, x_{i+1}]$ are rational functions with nth-degree numerator and linear denominator. Let $S_{nk}[\alpha, \beta]$ be the set of rational splines having at most k knots, and let $\bar{S}_{nk}[\alpha, \beta]$ be its closure with respect to the topology of uniform convergence. It is shown that, for each $f \in C[\alpha, \beta]$, there exists a best approximation $s^* \in \bar{S}_{nk}[\alpha, \beta]$ (in the Chebyshev sense). The splines belonging to $\bar{S}_{nk}[\alpha, \beta] \backslash S_{nk}[\alpha, \beta]$ are characterized explicitly: They consist of rational functions, too, but have multiple knots, the number of which is bounded by k, if counted multiply. However, in contrast to polynomial splines, at most threefold knots occur. Finally, some results on the existence of best smooth approximations in case $n = 2$ are reported.

1. EINLEITUNG

Sei $m \in \mathbb{N}$ und J ein beliebiges Intervall. Mit $\bar{R}_m(J)$ wird die Menge der rationalen Funktionen mit Zählergrad $\leqslant m$ und Nennergrad $\leqslant 1$ bezeichnet, deren Nenner im Intervall J nicht verschwindet und deren m-te Ableitung in J nicht negativ ist:

$$\bar{R}_m(J) = \{r : r = p/q, p \in \mathfrak{P}_m, q \in \mathfrak{P}_1, q(t) \neq 0 \text{ und } r^{(m)}(t) \geqslant 0 \text{ für alle } t \in J\}.$$

Eine Funktion $r \in \bar{R}_m(J)$ heißt ausgeartet, wenn sie zu $\mathfrak{P}_{m-1}$ gehört, andernfalls heißt sie regulär. Ist r regulär, so gilt $r^{(m)}(t) > 0$ für alle $t \in J$, denn $r^{(m)}$ hat die Form $a/(b + ct)^{m+1}$. Sei $R_m(J)$ die Menge der regulären Funktionen aus $\bar{R}_m(J)$.

Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, fest gewählt. Mit $S_n(x_0, x_1, ..., x_{k+1})$ werde die folgende Menge rationaler Splines mit festen Knoten $x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1}$ bezeichnet:

$$S_n(x_0, x_1, ..., x_{k+1}) = \{s : s \in C^n[x_0, x_{k+1}], \quad s \mid [x_j, x_{j+1}] \in R_n[x_j, x_{j+1}], 0 \leqslant j \leqslant k\}.$$

0021-9045/78/0233-0214$02.00/0

Schaback [5] , Werner [10] und Braess und Werner [3] benutzten Splines aus $S_2(x_0, x_1, \dots, x_{k+1})$ zur Interpolation bzw. Approximation. Allgemeinere nichtlineare Splines wurden von Schaback [6] und Arndt [1] zur Interpolation und von Runge [4] und Werner [11] zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen herangezogen.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Tschebyscheff-Approximation mit Funktionen aus der Menge

$$S_{nk}(I) = \bigcup_{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1} = \beta} S_n(x_0, x_1, \dots, x_{k+1});$$

dabei sei $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall. $S_{nk}(I)$ enthält also rationale Splines mit positiver n-ter Ableitung und (höchstens) k freien Knoten. Da $S_{nk}(I)$ in $C(I)$ nicht abgeschlossen ist bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz (z.B. liegt $f \equiv 0$ nicht in $S_{nk}(I)$, wohl aber im Rand von $S_{nk}(I)$), muß man zur Approximation den Abschluß $\bar{S}_{nk}(I)$ zulassen. Es wird gezeigt, daß zu jedem $f \in C(I)$ eine beste Approximation in $\bar{S}_{nk}(I)$ existiert. Außerdem werden die zu $\bar{S}_{nk}(I) \backslash S_{nk}(I)$ gehörenden Funktionen explizit charakterisiert: Sie bestehen stückweise aus rationalen Funktionen, die auch ausgeartet sein können. Im Gegensatz zu polynomialen Splines treten bei rationalen Splines jedoch höchstens dreifache Knoten auf. Die Vielfachheit eines Knotens richtet sich nicht nur nach der Differenzierbarkeit der Verheftung, sondern auch nach der Ausartung der angrenzenden Teilfunktionen. Die Knotenzahl der Splines aus $\bar{S}_{nk}(I)$ ist durch k beschränkt, wenn man die Knoten entsprechend ihrer Vielfachheit und innere, ausgeartete Teilfunktionen wie einfache Knoten zählt. Abschließend wird über die Existenz bester differenzierbarer Approximationen berichtet.

2. Der Abschluss von $S_{nk}(I)$ und die Existenz bester Approximationen

Sei $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, ein kompaktes Intervall. Im folgenden heißt eine Funktion $s \in C^{n-2}(I)$ rationaler Spline über I, wenn $s^{(n-2)}$ schwach konvex ist und wenn es eine Zerlegung von I der Form $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = \beta$ gibt mit

$$\begin{aligned} s \mid [x_j, x_{j+1}] &\in \bar{R}_n[x_j, x_{j+1}], && 0 \leqslant j \leqslant m, \\ s \mid [x_{j-1}, x_{j+1}] &\notin \bar{R}_n[x_{j-1}, x_{j+1}], && 1 \leqslant j \leqslant m. \end{aligned}$$

(Im Falle $m = 0$ ist die zweite Bedingung wegzulassen.) Die dadurch eindeutig bestimmten Punkte $x_1, \dots, x_m$ heißen Knoten von s.

Sei s ein rationaler Spline über I mit Knoten $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = \beta$, und sei $I_j = [x_{j-1}, x_j]$.

Das Teilintervall I_j heißt Ausartungsintervall von s, wenn $s \mid I_j$ ausgeartet ist; es heißt inneres Ausartungsintervall von s, wenn zusätzlich $I_j \subset [x_1, x_m]$ gilt.

Ein Knoten x_j von s heißt

—Knoten i-ter Art ($1 \leqslant i \leqslant 3$), wenn
$s \mid I_j \cup I_{j+1} \in C^{n+i-3}(I_j \cup I_{j+1}) \backslash C^{n+i-2}(I_j \cup I_{j+1})$ gilt;

—links (bzw. rechts) ausgeartet, wenn $s \mid I_j$ ausgeartet und $s \mid I_{j+1}$ regulär (bzw. $s \mid I_j$ regulär und $s \mid I_{j+1}$ ausgeartet) ist;

—regulär (bzw. beidseitig ausgeartet), wenn $s \mid I_j$ und $s \mid I_{j+1}$ regulär (bzw. ausgeartet) sind.

Ein links ausgearteter oder rechts ausgearteter Knoten wird auch einseitig ausgeartet genannt.

Ein Knoten heißt

—einfach, wenn er ein

beidseitig ausgearteter Knoten 1. Art oder ein
einseitig ausgearteter Knoten 2. Art oder ein
regulärer Knoten 3. Art ist;

—zweifach, wenn er ein

einseitig ausgearteter Knoten 1. Art oder ein
regulärer Knoten 2. Art ist;

—dreifach, wenn er ein

regulärer Knoten 1. Art ist.

TABELLE I

Die Einteilung der Knotentypen rationaler Splines im Falle $n = 2$

Ausartung / Vielfachheit	regulär	links ausgeartet	rechts ausgeartet	beidseitig ausgeartet
einfach	3. Art	2. Art	2. Art	1. Art
zweifach	2. Art	1. Art	1. Art	
dreifach	1. Art			

Die Gründe für diese Einteilung werden später sichtbar. Tabelle I veranschaulicht die Einteilung im Falle $n = 2$.

Für $x \in I$ sei $V(x, s)$ die Vielfachheit von x als Knoten von s:

$$\begin{aligned} V(x, s) &= i, && \text{falls } x \text{ ein } i\text{-facher Knoten von } s \text{ ist } (1 \leqslant i \leqslant 3), \\ &= 0, && \text{falls } x \text{ kein Knoten von } s \text{ ist.} \end{aligned}$$

Ferner sei $A(s)$ die Anzahl der inneren Ausartungsintervalle von s. Die durch s eindeutig bestimmte Zahl

$$\operatorname{ord}(s) = A(s) + \sum_{x \in I} V(x, s)$$

heißt Ordnung von s. Es wird sich zeigen, daß $\operatorname{ord}(s)$ als die eigentliche Knotenzahl von s angesehen werden muß. Man beachte, daß innere Ausartungsintervalle wie einfache Knoten gezählt werden. Sei $\hat{S}_{nk}(I)$ die Menge der rationalen Splines über I, deren Ordnung k nicht überschreitet:

$$\hat{S}_{nk}(I) = \{s : s \text{ ist rationaler Spline über } I \text{ mit } \operatorname{ord}(s) \leqslant k\}.$$

Da Splines aus $S_{nk}(I)$ höchstens k reguläre, einfache Knoten besitzen, gilt $S_{nk}(I) \subset \hat{S}_{nk}(I)$.

Wie üblich heißt eine Folge in $C(\alpha, \beta)$ kompakt konvergent, wenn sie auf jedem kompakten Teilintervall von (α, β) gleichmäßig konvergiert.

Die beiden folgenden Sätze haben zentrale Bedeutung:

SATZ 1. *Jede gleichmäßig beschränkte Folge in $S_{nk}(I)$ enthält eine Teilfolge, die kompakt gegen ein $s \in \hat{S}_{nk}(I)$ konvergiert.*

SATZ 2. *Zu jedem $s \in \hat{S}_{nk}(I)$ gibt es eine Folge in $S_{nk}(I)$, die gleichmäßig gegen s konvergiert.*

Zunächst sollen einige Folgerungen aus diesen beiden Sätzen gezogen werden:

Aus Satz 1 folgt $\bar{S}_{nk}(I) \subset \hat{S}_{nk}(I)$, während Satz 2 umgekehrt $\hat{S}_{nk}(I) \subset \bar{S}_{nk}(I)$ liefert; dabei sei $\bar{S}_{nk}(I)$ der Abschluß von $S_{nk}(I)$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Also hat man:

KOROLLAR 3. *Es gilt $\bar{S}_{nk}(I) = \hat{S}_{nk}(I)$.*

Damit ist eine explizite Charakterisierung von $\bar{S}_{nk}(I)$ erreicht.

Ist I' ein kompaktes Intervall und $g \in C(I')$, so bezeichne

$$\| g \|_{I'} = \sup \{ | g(t) | : t \in I' \}$$

die Tschebyscheff-Norm von g. Wie üblich heißt $s^* \in \bar{S}_{nk}(I)$ eine beste Approximation zu $f \in C(I)$, wenn

$$\|f - s^*\|_I = \inf_{s \in \bar{S}_{nk}(I)} \|f - s\|_I$$

erfüllt ist. Nach Satz 1 und Korollar 3 enthält jede gleichmäßig beschränkte Folge in $\bar{S}_{nk}(I)$ eine Teilfolge, die kompakt gegen ein $s \in \bar{S}_{nk}(I)$ konvergiert. Mit Standardschlüssen erhält man daraus den folgenden Existenzsatz:

SATZ 4. *Jedes $f \in C(I)$ besitzt eine beste Approximation in $\bar{S}_{nk}(I)$.*

Der Rest dieses Abschnittes befaßt sich mit dem Nachweis der Sätze 1 und 2. Aus Platzgründen können die Beweise einiger Hilfssätze nur angedeutet werden.

LEMMA 5. *Es sei $I' = [\alpha', \beta']$, $\alpha' < \beta'$, ein kompaktes Intervall und $\{f_\nu\} \subset C^m(I')$ eine gleichmäßig beschränkte Folge. Ferner wachse $f_\nu^{(m)}$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ monoton. Dann gibt es zu jedem kompakten Teilintervall J von (α', β') eine Konstante $K(J)$ mit*

$$\|f_\nu^{(m)}\|_J \leqslant K(J) \qquad \text{für alle} \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Zum Beweis schätzt man $f_\nu^{(m)}$ in dem kompakten Teilintervall $J = [\alpha' + \gamma, \beta' - \delta]$ von (α', β') durch geeignete Differenzenquotienten von f in $[\alpha', \alpha' + \gamma]$ und $[\beta' - \delta, \beta']$ *ab.* ▮

LEMMA 6. *Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$. Ferner sei I' ein beschränktes offenes Intervall und $\{f_\nu\} \subset C^m(I')$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß zu jedem kompakten Teilintervall J von I' eine Konstante $K(J)$ existiert mit*

$$\|f_\nu\|_J, \|f_\nu^{(m)}\|_J \leqslant K(J) \qquad \text{für alle} \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann gilt:

(a) *Für jedes $j \in \{0, \ldots, m - 1\}$ und für jedes kompakte Teilintervall J von I' ist die Folge $\{f_\nu^{(j)} \mid J\}$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig.*

(b) *Die Folge $\{f_\nu\}$ enthält eine kompakt konvergente Teilfolge.*

(c) *Die Grenzfunktion jeder kompakt konvergenten Teilfolge von $\{f_\nu\}$ gehört zu $C^{m-1}(I')$.*

Beweisskizze. Aussage (a) folgt mittels (1) aus einer Taylorentwicklung von f. Die Aussagen (b) und (c) folgen aus (a) unter Verwendung des Satzes von Arzela-Ascoli. ▮

Das folgende Lemma faßt einige Eigenschaften rationaler Funktionen mit linearem Nenner zusammen. Es kann mit Standardmethoden aus der Theorie der rationalen Tschebyscheff-Approximation bewiesen werden:

LEMMA 7. *Es sei* $I' = [\alpha', \beta']$, $\alpha' < \beta'$, *ein kompaktes Intervall,* $I'' = [\alpha'', \beta'']$, $\alpha'' < \beta''$, *ein Teilintervall von* I' *und* $I_\nu' = [\alpha_\nu', \beta_\nu']$, $\nu \in \mathbb{N}$, *eine Folge von Intervallen mit* $\lim I_\nu' = I'$ *und* $I'' \subset I_\nu'$ *für alle* $\nu \in \mathbb{N}$. *Ferner sei* $\{r_\nu\}$ *eine Folge rationaler Funktionen mit* $r_\nu \in R_n(I_\nu')$ *und* $\| r_\nu \|_{I_\nu'} \leqslant K$ *für alle* $\nu \in \mathbb{N}$, *die auf* I'' *gleichmäßig gegen ein* $f \in C(I'')$ *konvergiert. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau ein* $r \in \bar{R}_n(I')$ *mit* $r \mid I'' = f$.

(b) *Ist r regulär, so gilt*

$$\lim \| r^{(j)} - r_\nu^{(j)} \|_{I' \cap I_\nu'} = 0 \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}_0 .$$

(c) *Ist r ausgeartet, so existiert eine Teilfolge* $\{\hat{r}_\nu\}$ *von* $\{r_\nu\}$ *mit* $\lim \hat{r}_\nu^{(n)}(\alpha_\nu') = 0$ *oder es existiert eine Teilfolge* $\{\hat{\hat{r}}_\nu\}$ *von* $\{r_\nu\}$ *mit* $\lim \hat{\hat{r}}_\nu^{(n)}(\beta_\nu') = 0$.

(d) *Gilt* $\lim r_\nu^{(n)}(\alpha_\nu') = 0$, *so folgt*

$$\lim \| r^{(j)} - r_\nu^{(j)} \|_{J \cap I_\nu'} = 0 \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}_0$$

für jedes kompakte Teilintervall J von $[\alpha', \beta')$.

Gilt $\lim r_\nu^{(n)}(\beta_\nu') = 0$, *so folgt*

$$\lim \| r^{(j)} - r_\nu^{(j)} \|_{J \cap I_\nu'} = 0 \qquad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}_0$$

für jedes kompakte Teilintervall J von $(\alpha', \beta']$.

LEMMA 8. *Sei* $\{s_\nu\} \subset S_{nk}(I)$ *eine gleichmäßig beschränkte Folge. Dann gibt es einen rationalen Spline s über I und eine Teilfolge* $\{\tilde{s}_\nu\}$ *von* $\{s_\nu\}$, *die kompakt gegen s konvergiert.*

Beweis. Wegen $s_\nu^{(n)} > 0$ wächst $s_\nu^{(n-1)}$ monoton. Nach Lemma 5 gibt es zu jedem kompakten Teilintervall J von (α, β) eine Konstante $K(J)$ mit $\| s_\nu^{(n-1)} \|_J \leqslant K(J)$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Also erfüllt die Folge $\{s_\nu\}$ die Voraussetzungen von Lemma 6 mit $m = n - 1$. Sie enthält daher eine kompakt konvergente Teilfolge $\{\tilde{s}_\nu\}$. Es genügt zu zeigen, daß die in (α, β) definierte Grenzfunktion $f = \lim \tilde{s}_\nu$ stetig auf I fortgesetzt werden kann und daß die fortgesetzte Funktion ein rationaler Spline über I ist:

Seien $\alpha = x_0^\nu < x_1^\nu < \cdots < x_{p_\nu+1}^\nu = \beta$ die Knoten von $\tilde{s}_\nu$. Nach Auswahl einer Teilfolge kann konstante Knotenzahl $p_\nu = p$ und Konvergenz der Knotenfolgen $\{x_0^\nu\}, \{x_1^\nu\}, \ldots, \{x_{p+1}^\nu\}$ gegen Punkte $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = \beta$ angenommen werden. Mit Hilfe von Lemma 7(a) folgt, daß f stetig zu einer Funktion $s \in C(I)$ fortgesetzt werden kann und daß ferner $s \mid [x_j, x_{j+1}] \in \bar{R}_n[x_j, x_{j+1}]$ gilt für $0 \leqslant j \leqslant p$. Nach Lemma 6(c) hat man $s \in C^{n-2}(I)$.

Da alle $s_\nu^{(n-2)}$ strikt konvex sind, ist $s^{(n-2)}$ schwach konvex. Also ist s ein rationaler Spline über I. ∎

Bemerkung. Nach Lemma 8 konvergiert insbesondere jede gleichmäßig konvergente Folge $\{s_\nu\} \subset S_{nk}(I)$ gegen einen rationalen Spline über I.

Lemma 8 enthält noch keine Aussage über die Ordnung der Grenzfunktion. Diese kann mit Hilfe des folgenden Lemmas nach oben abgeschätzt werden:

LEMMA 9. *Es sei $I' = [\alpha', \beta']$, $\alpha' < \beta'$, ein kompaktes Intervall.*

(a) *Sei $\{s_\nu\} \subset S_{n0}(I') = R_n(I')$ eine gegen s gleichmäßig konvergente Folge. Dann gilt $V(x, s) = 0$ für alle $x \in I'$.*

(b) *Sei $\{s_\nu\} \subset S_{n1}(I') \backslash S_{n0}(I')$ eine gegen s gleichmäßig konvergente Folge. Für die Knoten x^ν von s_ν gelte $\lim x^\nu = x \in (\alpha', \beta')$. Dann ist $V(x, s) \leqslant 1$. Im Falle $\lim s_\nu^{(n)}(x^\nu) = 0$ gilt sogar $V(x, s) = 0$ und $s \in \mathfrak{P}_{n-1}$.*

(c) *Sei $\{s_\nu\} \subset S_{n2}(I') \backslash S_{n1}(I')$ eine gegen s gleichmäßig konvergente Folge. Für die Knoten $\alpha' < y^\nu < z^\nu < \beta'$ von s_ν gelte $\lim y^\nu = \lim z^\nu = x \in (\alpha', \beta')$. Dann ist $V(x, s) \leqslant 2$. Im Falle $\lim s_\nu^{(n)}(y^\nu) = 0$ gilt sogar $V(x, s) \leqslant 1$.*

(d) *Gegeben seien zwei Zahlen $i, j \in \{1, 2\}$ und eine gegen s gleichmäßig konvergente Folge $\{s_\nu\} \subset S_{n,i+j}(I') \backslash S_{n,i+j-1}(I')$. Für die Knoten $\alpha' < x_1^\nu < \cdots < x_{i+j}^\nu < \beta'$ von s_ν gelte $\lim x_l^\nu = x$ für $1 \leqslant l \leqslant i$ und $\lim x_l^\nu = y$ für $i + 1 \leqslant l \leqslant i + j$ mit $\alpha' < x < y < \beta'$. Außerdem sei $V(x, s) = i$ und $V(y, s) = j$. Dann ist $s \mid [x, y]$ regulär.*

Beweis. (a) Wegen $s \in \bar{R}_n(I')$ hat s keinen Knoten.

(b) Sei $\delta = \frac{1}{2} \min\{x - \alpha', \beta' - x\}$ und $J = (\alpha' + \delta, \beta' - \delta)$. Für hinreichend große ν werden durch $\tilde{s}_\nu(t) = s_\nu(t + x^\nu - x)$, $t \in J$, rationale Splines $\tilde{s}_\nu \in S_n(\alpha' + \delta, x, \beta' - \delta)$ definiert. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Folge $\{s_\nu \mid J\}$ gilt $\lim \| s_\nu - \tilde{s}_\nu \|_J = 0$ und somit auch $\lim \| s - \tilde{s}_\nu \|_J = 0$. Also ist $s \mid J$ Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge rationaler Splines mit dem festen Knoten x. Ferner hat man $\tilde{s}_\nu^{(n)}(x) = s_\nu^{(n)}(x^\nu)$. Nun entnimmt man die Behauptungen von (b) dem Beweis zu Satz 3.4 in [10]. (Der zitierte Beweis ist nur für den Fall $n = 2$ ausgeführt, läßt sich aber unmittelbar für beliebige $n \geqslant 2$ erweitern.)

(c) Aus dem Beweis zu (b) geht hervor, daß ohne Einschränkung $y^\nu = x$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt werden kann. Angenommen, es sei $V(x, s) = 3$. Dann muß x ein regulärer Knoten 1. Art von s sein, insbesondere gilt $s \notin C^{n-1}(I')$. Nach Lemma 7(b) sind die Folgen $\{\| s_\nu^{(n)} \|_{[\alpha', y^\nu]}\}$ und $\{\| s_\nu^{(n)} \|_{[z^\nu, \beta']}\}$ beschränkt. Aus der Monotonie von $s_\nu^{(n)} \mid [y^\nu, z^\nu]$ folgt, daß dann auch die Folge $\{\| s_\nu^{(n)} \|_{I'}\}$ beschränkt ist. Nach Lemma 6(c) hat man daher $s \in C^{n-1}(I')$, ein Widerspruch.

Nun gelte $\lim s_\nu^{(n)}(y^\nu) = 0$. Aus Lemma 7(d) folgt, daß $s \mid [\alpha', x]$ ausgeartet ist. Angenommen, es sei $V(x, s) = 2$. Dann muß x ein links ausgearteter Knoten 1. Art von s sein, insbesondere gilt $s \notin C^{n-1}(I')$. Ähnlich wie soeben erkennt man mit Hilfe von Lemma 7(b) und (d), daß die Folge $\{s_\nu^{(n)}\}$ im Intervall $[(\alpha' + x)/2, \beta']$ gleichmäßig beschränkt ist. Mittels Lemma 6(c) ergibt sich wieder $s \in C^{n-1}(I')$, ein Widerspruch.

(d) Angenommen, $s \mid [x, y]$ sei ausgeartet. Wegen Lemma 7(c) kann nach Auswahl einer Teilfolge $\lim s_\nu^{(n)}(x^\nu) = 0$ oder $\lim s_\nu^{(n)}(y^\nu) = 0$, aus Symmetriegründen $\lim s_\nu^{(n)}(y^\nu) = 0$ angenommen werden. Die bereits bewiesenen Aussagen (b) und (c) liefern nun $V(y, s) < j$, im Widerspruch zur Voraussetzung. ▌

Beweis von Satz 1. Sei $\{s_\nu\} \subset S_{nk}(I)$ eine beschränkte Folge. Nach Lemma 8 enthält $\{s_\nu\}$ eine Teilfolge $\{\tilde{s}_\nu\}$, die kompakt gegen einen rationalen Spline s über I konvergiert. Es bleibt $\operatorname{ord}(s) \leqslant k$ zu zeigen: Seien $\alpha < x_1^\nu < \cdots < x_{p_\nu}^\nu < \beta$ die Knoten $\tilde{s}_\nu$. Nach Auswahl einer Teilfolge kann man konstante Knotenzahl $p_\nu = p \leqslant k$ und konvergente Knotenfolgen $\{x_j^\nu\}$ annehmen. Ist x ein i-facher Knoten von s, so müssen nach Lemma 9(a-c) mindestens i der Knotenfolgen $\{x_j^\nu\}$ gegen x konvergieren. Lemma 9(d) besagt, daß ein inneres Ausartungsintervall J von s höchstens dann entstehen kann, wenn zusätzlich mindestens eine weitere Knotenfolge gegen einen Punkt aus J konvergiert. Also gilt

$$\operatorname{ord}(s) = A(s) + \sum_{x \in I} V(x, s) \leqslant p \leqslant k. \quad ▌$$

Der Beweis von Satz 2 erfordert zwei weitere Hilfssätze. Das folgende Interpolationslemma beweist man leicht durch vollständige Induktion über die Zahl der Knoten:

LEMMA 10. *Gegeben seien Knoten* $x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1}$ *und reelle Zahlen* $f_0, \ldots, f_{n-1}, g_0, \ldots, g_{k+1}$ *mit* $g_i > 0$ *für* $0 \leqslant i \leqslant k+1$. *Dann gibt es genau ein* $s \in S_n(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1})$ *mit*

$$s^{(j)}(x_0) = f_j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$
$$s^{(n)}(x_j) = g_j, \qquad 0 \leqslant j \leqslant k+1.$$

Das nächste Lemma kann mit Hilfe von Korollar 5.4 in [1] bewiesen werden:

LEMMA 11. *Sei* $[\alpha', \beta'], \alpha' < \beta'$, *ein kompaktes Intervall und* $r \in R_n[\alpha', \beta']$. *Ferner sei* $M_0 = (r^{(n)}(\alpha'))^{1/(n+1)}$, $M_1 = (r^{(n)}(\beta'))^{1/(n+1)}$. *Dann gilt*

$$r^{(n-1)}(\beta') - r^{(n-1)}(\alpha') = (\beta' - \alpha')/n \sum_{j=1}^{n} M_0{}^j M_1^{n+1-j}.$$

Im nun folgenden Beweis von Satz 2 wird eine Beweisidee von H. Arndt auf freie Knoten übertragen.

Beweis von Satz 2. Sei $s \in \hat{S}_{nk}(I)$ mit den Knoten $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m+1} = \beta$, und sei $p = \operatorname{ord}(s)$. Durch vollständige Induktion über p wird gezeigt: Es gibt eine Folge $\{s_\nu\} \subset S_{np}(I)$, die gleichmäßig gegen s konvergiert.

Induktionsanfang. Ist $p = 0$, so hat s keinen Knoten und gehört daher sogar zu $\bar{R}_n(I)$. Die durch

$$\begin{aligned} s_\nu(t) &= s(t), && \text{falls } s \in R_n(I) \\ &= s(t) + t^n/\nu, && \text{falls } s \in \mathfrak{P}_{n-1} \end{aligned}$$

definierte Folge $\{s_\nu\}$ gehört zu $R_n(I) = S_{n0}(I)$ und konvergiert gleichmäßig gegen s.

Induktionsshritt. Sei $p > 0$ und daher auch $m > 0$. Es werde $x = x_m$, $\tilde{I} = [\alpha, x]$, $\hat{I} = [x, \beta]$, $\tilde{s} = s \mid \tilde{I}$ und $\tilde{p} = \operatorname{ord}(\tilde{s})$ gesetzt. Offenbar gilt $\tilde{p} < p$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Folge $\{\tilde{s}_\nu\} \subset S_{n\tilde{p}}(\tilde{I})$, die gleichmäßig gegen $\tilde{s}$ konvergiert. Die gesuchten Splines s_ν werden nun durch Fortsetzung von $\tilde{s}_\nu$ auf I konstruiert. Die Art der Fortsetzung richtet sich nach der Ausartung und Vielfachheit von x als Knoten von s.

(A) Zunächst werden die Fälle betrachtet, in denen $s \mid [x_{m-1}, x]$ regulär ist. Da dann $[x_{m-1}, x]$ kein inneres Ausartungsintervall von s ist, gilt $\tilde{p} = p - V(x, s)$. Ferner ist x ein regulärer oder rechts ausgearteter Knoten von s.

1. Für $\nu \in \mathbb{N}$ mit $x + 1/\nu < \beta$ wird s_ν definiert durch

$$\begin{aligned} s_\nu(t) &= \tilde{s}_\nu(t), && t \in \tilde{I}, \\ &= \hat{s}_\nu(t), && t \in \hat{I}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $\hat{s}_\nu$ entsprechend dem Knotentyp von x zu wählen ist und durch Interpolation gemäß Lemma 10 gewonnen wird. Die jeweils von $\hat{s}_\nu$ zu erfüllenden Bedingungen sind:

(a) Falls x ein regulärer einfacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu \in S_n(x, \beta), \tag{3}$$

$$\hat{s}_\nu^{(j)}(x) = \tilde{s}^{(j)}(x), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(\beta) = s^{(n)}(\beta). \tag{5}$$

(b) Falls x ein regulärer zweifacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu \in S_n(x, x + 1/\nu, \beta), \tag{6}$$

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(x + 1/\nu) = s^{(n)}(x + 1/\nu) \tag{7}$$

sowie (4), (5).

(c) Falls x ein regulärer dreifacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu \in S_n(x, x + 1/(2\nu), x + 1/\nu, \beta),$$

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(x + 1/(2\nu)) = (c \cdot \nu)^{(n+1)/n} \tag{8}$$

sowie (4), (5), (7); die Konstante c in (8) sei durch

$$s^{(n-1)}(x+) - s^{(n-1)}(x-) = [c/(2n)][s^{(n)}(x+)^{1/(n+1)} + s^{(n)}(x-)^{1/(n+1)}] \tag{9}$$

festgelegt.

(d) Falls x ein rechts ausgearteter einfacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(\beta) = (1/\nu)^{n+1} \tag{10}$$

sowie (3), (4).

(e) Falls x ein rechts ausgearteter zweifacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(x + 1/\nu) = (c \cdot \nu)^{(n+1)/n} \tag{11}$$

sowie (4), (6), (10); die Konstante c in (11) sei durch

$$s^{(n-1)}(x+) - s^{(n-1)}(x-) = (c/n)[\beta - x + s^{(n)}(x-)^{1/n}] \tag{12}$$

festgelegt.

In allen Fällen gewährleistet Lemma 10 die eindeutige Lösbarkeit der Interpolationsaufgaben. Man beachte dabei, daß die Konstante c in den Fällen (c) und (e) jeweils positiv ist, da wegen der Konvexität von $s^{(n-2)}$ in einem Knoten 1. Art stets $s^{(n-1)}(x-) < s^{(n-1)}(x+)$ gilt.

Die gemäß (2) gebildeten Splines s_ν besitzen in x aufgrund der Anschlußbedingung (4) einen regulären einfachen (oder "zufällig" keinen) Knoten. Die Teilfunktionen $\tilde{s}_\nu$ und $\hat{s}_\nu$ haben ebenfalls nur solche Knoten. In allen Fällen besitzt s_ν höchstens $V(x, s)$ Knoten mehr als $\tilde{s}_\nu$, d.h. $\text{ord}(s_\nu) \leqslant \tilde{p} + V(x, s) = p$. Insgesamt ergibt sich daher $\{s_\nu\} \subset S_{np}(I)$. Es genügt zu zeigen, daß eine Teilfoge von $\{s_\nu\}$ gleichmäßig gegen s konvergiert.

2. Sei $z \in (x_{m-1}, x)$. Dann gilt $\text{ord}(\tilde{s} \,|[\alpha, z]) = \text{ord}(\tilde{s}) = \tilde{p}$, und die Folge $\{\tilde{s}_\nu\}$ konvergiert in $[\alpha, z]$ erst recht gleichmäßig gegen $\tilde{s}$. Aus dem Beweis zu Satz 1 ergibt sich daher $\text{ord}(\tilde{s}_\nu \,|[\alpha, z]) \geqslant \tilde{p}$ für fast alle ν. Mithin besitzen fast alle $\tilde{s}_\nu$ genau $\tilde{p}$ Knoten, und diese liegen in $[\alpha, z]$. Man kann

daher in $[z, x]$ Lemma 7(b) anwenden, welches zusammen mit (4) die Beziehung

$$\lim \hat{s}_\nu^{(j)}(x) = \lim \tilde{s}_\nu^{(j)}(x) = s^{(j)}(x-), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{13}$$

liefert.

Nun wird gezeigt, daß die Folge $\{\hat{s}_\nu^{(n-1)}(\beta) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x)\}$ konvergiert. Sei dazu x z.B. ein rechts ausgearteter zweifacher Knoten von s. Aus (4), (10), (11) und Lemma 11 folgt:

$$\begin{aligned} &\hat{s}_\nu^{(n-1)}(\beta) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x) \\ &= [\hat{s}_\nu^{(n-1)}(\beta) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/\nu)] + [\hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/\nu) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x)] \\ &= \frac{\beta - x - 1/\nu}{n} \sum_{j=1}^{n} (c \cdot \nu)^{j/n} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{n+1-j} \\ &\quad + \frac{1}{\nu \cdot n} \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_\nu^{(n)}(x)^{j/(n+1)} (c \cdot \nu)^{(n+1-j)/n}. \end{aligned}$$

Hieran kann die Konvergenz unter Benutzung von (13) unmittelbar nachgeprüft werden. Sinngemäß geht man vor, wenn in x einer der übrigen Knotentypen vorliegt.

Wegen (13) konvergiert mit $\{\hat{s}_\nu^{(n-1)}(\beta) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x)\}$ auch die Folge $\{\hat{s}_\nu^{(n-1}(\beta)\}$. Wegen der Monotonie von $\hat{s}_\nu^{(n-1)}$ muß also die Folge $\{\| \hat{s}_\nu^{(n-1)} \|_{\hat{I}}\}$ beschränkt sein. Wegen (13) gilt dies dann auch für die Folgen $\{\| \hat{s}_\nu \|_{\hat{I}}\}$ und $\{\| \hat{s}_\nu' \|_{\hat{I}}\}$. Man kann daher ohne Einschränkung die Konvergenz der Folge $\{\hat{s}_\nu\}$ und damit auch die der Folge $\{s_\nu\}$ annehmen. Sei $\hat{s} = \lim \hat{s}_\nu$, $s^* = \lim s_\nu$. Es gilt $\hat{s} \in \bar{R}_n(\hat{I})$, da $\hat{s}$ keinen Knoten haben kann. Nach Induktionsvoraussetzung hat man

$$s^* \mid \tilde{I} \equiv \tilde{s} \equiv s \mid \tilde{I}; \tag{14}$$

zu zeigen bleibt

$$\hat{s} \equiv s \mid \hat{I}. \tag{15}$$

3. Sei s auch in $\hat{I}$ regulär, z.B. sei x ein regulärer zweifacher Knoten von s. Aus (5) bzw. (7) folgt dann $\lim \hat{s}_\nu^{(n)}(\beta) = s^{(n)}(\beta) > 0$ bzw. $\lim \hat{s}^{(n)}$ $(x + (1/\nu)) = s_\nu^{(n)}(x+) > 0$. Nach Lemma 7(c) ist also auch $\hat{s}$ regulär. Außerdem gilt

$$\hat{s}^{(n)} \equiv s^{(n)} \mid \hat{I}, \tag{16}$$

da $\hat{s}^{(n)} - s^{(n)} \mid \hat{I}$ identisch verschwindet oder höchstens eine Nullstelle besitzt. Ähnlich ergibt sich (16) auch, wenn x ein regulärer ein-oder dreifacher Knoten von s ist.

Ist andererseits s in $\hat{I}$ ausgeartet, so folgt aus (10) und Lemma 7(d), daß auch $\hat{s}$ ausgeartet ist. Insbesondere ist wieder (16) erfüllt.

Wegen $s, s^* \in C^{n-2}(I)$ und (14) gilt neben (16) ferner

$$\hat{s}^{(j)}(x) = s^{*(j)}(x+) = s^{(j)}(x+), \qquad 0 < j \leqslant n-2. \tag{17}$$

Es genügt also nun,

$$\hat{s}^{(n-1)}(x) = s^{(n-1)}(x+) \tag{18}$$

zu zeigen, denn (15) würde aus (16), (17), (18) und der Eindeutigkeitsaussage von Lemma 10 folgen.

Zum Nachweis von (18) wird zunächst der Fall $s \mid [x_{m-1}, \beta] \in C^{n-1}[x_{m-1}, \beta]$ betrachtet. Ist x etwa ein rechts ausgearteter einfacher Knoten von s, so muß x wegen (14) und (16) auch ein rechts ausgearteter Knoten von s^* sein. Aus Lemma 9(b) folgt weiter $V(x, s^*) \leqslant 1$. Also ist x auch ein rechts ausgearteter einfacher Knoten von s^*, d.h. es gilt auch $s^* \mid [x_{m-1}, \beta] \in C^{n-1}[x_{m-1}, \beta]$.

Zusammen mit (14) erhält man hieraus (18). Analog ergibt sich (18), wenn x ein regulärer ein- oder zweifacher Knoten von s ist.

Nun sei x ein Knoten 1. Art von s, etwa ein regulärer dreifacher Knoten. Mit (4), (7), (8), (13) sowie den Lemmata 7(b) und 11 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\hat{s}^{(n-1)}(x) - s^{(n-1)}(x-) \\
&= \lim[\hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/\nu) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x)] \\
&= \lim[\hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/\nu) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/(2\nu))] \\
&\qquad + \lim[\hat{s}_\nu^{(n-1)}(x + 1/(2\nu)) - \hat{s}_\nu^{(n-1)}(x)] \\
&= \lim \frac{1}{2\nu n} \sum_{j=1}^{n} (c \cdot \nu)^{j/n}\, s^{(n)}(x + 1/\nu)^{(n+1-j)/(n+1)} \\
&\qquad + \lim \frac{1}{2\nu n} \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_\nu^{(n)}(x)^{j/(n+1)}\, (c \cdot \nu)^{(n+1-j)/n} \\
&= \frac{c}{2n} [s^{(n)}(x+)^{1/(n+1)} + s^{(n)}(x-)^{1/(n+1)}].
\end{aligned}$$

Wegen (9) hat man daher

$$\hat{s}^{(n-1)}(x) - s^{(n-1)}(x-) = s^{(n-1)}(x+) - s^{(n-1)}(x-).$$

Hieraus folgt (18).

In ähnlicher Weise erhält man (18) auch, wenn x ein rechts ausgearteter zweifacher Knoten von s ist.

(B) Nun werden die Fälle betrachtet, in denen $[x_{m-1}, x]$ ein inneres Ausartungsintervall von s ist:

$$s\,|[x_{m-1}, x] \in \mathfrak{P}_{n-1}, \qquad x_{m-1} > \alpha.$$

Dann ist x ein links oder beidseitig ausgearteter Knoten von s, und für die Ordnungen von $\tilde{s}$ und s gilt: $\tilde{p} = p - V(x, s) - 1$.

Es sei $\bar{x}$ der Mittelpunkt von $[x_{m-1}, x]$ und $\epsilon_\nu = \tilde{s}^{(n)}(\bar{x})^{1/(n+1)}$. Wiederum liegen in jedem Intervall der Form $[x_{m-1} + \delta, x]$ die Knoten von höchstens endlich vielen $\tilde{s}_\nu$. Mit Lemma 7(c) und (d) erhält man dann (evtl. erst nach Auswahl einer Teilfolge) $\lim \epsilon_\nu = 0$ und

$$\lim \tilde{s}_\nu^{(j)}(\bar{x}) = s^{(j)}(\bar{x}), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

Für alle $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \leqslant \nu_0$, wobei $x + \epsilon_\nu < \beta$ für alle $\nu \geqslant \nu_0$, wird s_ν nunmehr definiert durch

$$\begin{aligned} s_\nu(t) &= \tilde{s}_\nu(t), \qquad t \in [\alpha, \bar{x}] \\ &= \hat{s}_\nu(t), \qquad t \in [\bar{x}, \beta]; \end{aligned}$$

dabei ist $\hat{s}_\nu$ entsprechend dem Knotentyp von x zu wählen und wird durch Interpolation gemäß Lemma 10 gewonnen. Die jeweils von $\hat{s}_\nu$ zu erfüllenden Bedingungen sind:

(a) Falls x ein links ausgearteter einfacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu \in S_n(\bar{x}, x, \beta), \tag{20}$$

$$\hat{s}_\nu^{(j)}(\bar{x}) = \tilde{s}_\nu^{(j)}(\bar{x}), \qquad 0 \leqslant j \leqslant n, \tag{21}$$

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(x) = s^{(n)}(x+),$$

$$\hat{s}_\nu^{(n)}(\beta) = s^{(n)}(\beta). \tag{22}$$

(b) Falls x ein beidseitig ausgearteter einfacher Knoten von s ist:

$$\begin{aligned} \hat{s}_\nu^{(n)}(x) &= (c/\epsilon_\nu)^{(n+1)/n}, \\ \hat{s}_\nu^{(n)}(\beta) &= \epsilon_\nu^{n+1} \end{aligned} \tag{23}$$

sowie (20), (21); die Konstante c in (23) sei durch

$$s^{(n-1)}(x+) - s^{(n-1)}(x-) = (c/n)(\beta - \bar{x})$$

festgelegt.

(c) Falls x ein links ausgearteter zweifacher Knoten von s ist:

$$\hat{s}_\nu \in S_n(\bar{x}, x, x + \epsilon_\nu, \beta),$$
$$\hat{s}_\nu^{(n)}(x + \epsilon_\nu) = s^{(n)}(x + \epsilon_\nu)$$

sowie (21), (22), (23); die Konstante c in (23) sei dabei durch

$$s^{(n-1)}(x+) - s^{(n-1)}(x-) = (c/n)[s^{(n)}(x+)^{1/(n+1)} + x - \bar{x}]$$

festgelegt.

Der weitere Beweis verläuft ähnlich wie in (A): Die obigen Interpolationsaufgaben sind eindeutig lösbar und die Folge $\{s_\nu\}$ gehört zu $S_{n\mathfrak{p}}(I)$; wie in (A)2. erkennt man, daß ohne Einschränkung ihre Konvergenz angenommen werden kann. Sei wieder $s^* = \lim s_\nu$. Wegen $\lim \bar{s}^{(n)}(\bar{x}) = s^{(n)}(\bar{x}) = 0$ folgt aus Lemma 9(b) zunächst $s^* \mid [x_{m-1}, x] \in \mathfrak{P}_{n-1}$; beachtet man noch (19) und (21), so ergibt sich $s^* \equiv s$ in $[x_{m-1}, x]$ und daher $s^* \equiv s$ in $\bar{I}$. Mit denselben Methoden wie in (A) 3. und 4. zeigt man sodann $s^* \equiv s$ in $\hat{I}$.

(C) Die Behandlung des einzig übrig gebliebenen Falles, nämlich daß $[x_{m-1}, x]$ ein am Rande gelegenes Ausartungsintervall von s ist, geschieht durch sinngemäße Anwendung der obigen Methoden. ∎

3. Differenzierbare beste Approximationen in $\bar{S}_{2k}(I)$

Splines aus $\bar{S}_{2k}(I)$ sind i.a. nur stetig. Man fragt deshalb nach Funktionen $f \in C(I)$, die eine differenzierbare beste Approximation in $\bar{S}_{2k}(I)$ besitzen. Einfache Beispiele zeigen, daß dazu—anders als bei polynomialen Splines (vgl. [9])—die Differenzierbarkeit von f nicht genügt (vgl. [7]). Jedoch gilt:

Satz 12. *Zu jeder strikt konvexen Funktion $f \in C^1(I)$ existiert eine strikt konvexe beste Approximation in $\bar{S}_{2k}(I) \cap C^1(I)$.*

Der Beweis stützt sich auf eine Reihe von Hilfssätzen, mit deren Hilfe Knicke und lineare Teilstücke einer besten Approximation zu f in $\bar{S}_{2k}(I)$ lokal geglättet und geringfügig gekrümmt werden können, ohne die Approximationsgüte zu verschlechtern. Wegen seiner Länge muß auf [7] verwiesen werden.

Eine Verschärfung von Satz 12 ist nicht möglich:

Satz 13. *Ist $k \geqslant 2$, so gibt es eine strikt konvexe Funktion $f \in C^\infty(I)$, die keine beste Approximation in $S_{2k}(I)$ hat.*

Dies zeigt man ähnlich wie Theorem 3.8 in [9].

Anmerkung und Dank

Dieser Arbeit liegt ein Teil der Dissertation des Verfassers zugrunde, welche am Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik der Universität Münster angefertigt wurde. Der Verfasser möchte besonders Herrn Prof. Dr. H. Werner danken für die Anregung und Förderung der Dissertation. Sein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. D. Braess für wertvolle Hinweise und Ratschläge.

Literatur

1. H. Arndt, "Interpolation mit regulären Spline-Funktionen," Dissertation, Münster, 1974.
2. R. B. Barrar und H. L. Loeb, Existence of best spline approximations with free knots, *J. Math. Anal. Appl.* **31** (1970), 383–390.
3. D. Braess und H. Werner, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, II, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 379–399.
4. R. Runge, "Lösung von Anfangswertproblemen mit Hilfe nichtlinearer Klassen von Spline-Funktionen," Dissertation, Münster, 1972.
5. R. Schaback, Spezielle rationale Spline-Funktionen, *J. Approximation Theory* **7** (1973), 281–292.
6. R. Schaback, Interpolation mit nichtlinearen Klassen von Spline-Funktionen. *J. Approximation Theory* **8** (1973), 173–188.
7. H. Schomberg, "Tschebyscheff-Approximation durch rationale Spline-Funktionen mit freien Knoten," Dissertation, Münster, 1973.
8. L. L. Schumaker, Uniform approximation by Chebyshev spline functions. II. Free Knots, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 647–656.
9. L. L. Schumaker, On the smoothness of best spline approximations, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 410–418.
10. H. Werner, Tschebyscheff-Approximation mit einer Klasse rationaler Splinefunktionen, *J. Approximation Theory* **10** (1974), 74–92.
11. H. Werner, Interpolation and integration of initial value problems of ordinary differential equations by regular splines, *J. Numer. Anal.* **12** (1975), 255–271.